Problema 1 ***Sisteme de referință inerțiale în mișcări relative***	**Parțial**	**Punctaj**
Barem subiect 1		**10 p**
a)	**3 p**	

În originea sistemului inerțial fix XYZ, reprezentat în desenul din figura 3, se află o sursă S de oscilații electromagnetice, efectuate de-a lungul axei Z după legea:

$$E_S = E_{max}\sin\omega_s t = E_{max}\sin 2\pi\nu_s t.$$

Transmiterea din aproape în aproape a acestor oscilații, de-a lungul axei Y, cu viteza c, reprezintă unda electromagnetică (transversală) plană, a cărei ecuație este:

$$E = E_{max}\sin\omega_s\left(t-\frac{y}{c}\right) = E_{max}\sin 2\pi\nu_s\left(t-\frac{y}{c}\right),$$

unde y este coordonata de poziție a frontului de undă la momentul t, în raport cu sistemul fix XYZ, iar E este valoarea instantanee a intensității câmpului electric al undei electromagnetice în punctul considerat.

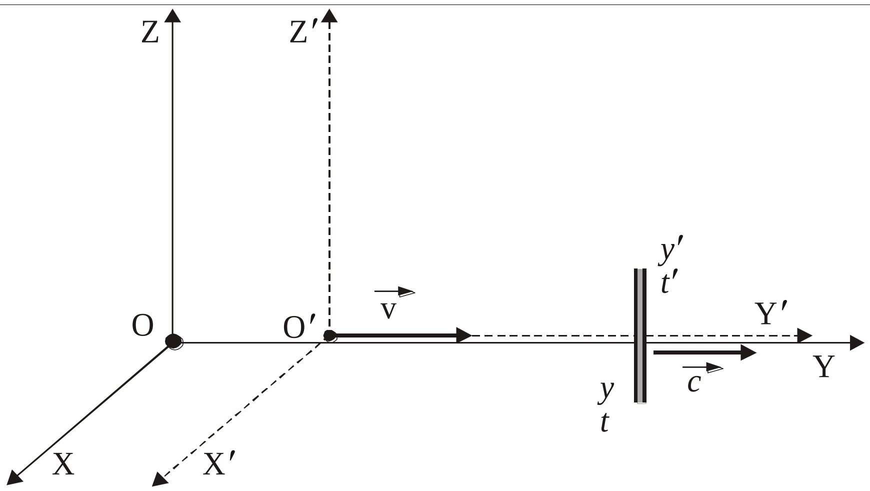


Fig. 3

Expresia:

$$\phi = 2\pi\nu_s\left(t-\frac{y}{c}\right),$$

reprezintă faza oscilațiilor electromagnetice în sistemul fix XYZ.

Corespunzător sistemului mobil X′Y′Z′, faza oscilațiilor este:

$$\phi' = 2\pi\nu_{obs}\left(t'-\frac{y'}{c}\right),$$

unde y' și t' reprezintă coordonatele spațio-temporale ale aceluiași front de undă față de sistemul X′Y′Z′.

Faza unei unde este o mărime direct proporțională cu numărul de maxime care trec pe lângă un observator aflat într-un anumit sistem de referință inerțial. Deoarece operația de numărare a acestor maxime este independentă de sistemul de coordonate, înseamnă că faza undei este un invariant al transformărilor Lorentz.

Folosind transformările Lorenz, rezultă:

$$t=\frac{t'+\frac{\mathrm{v}}{c^2}y'}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad y=\frac{y'+\mathrm{v}t'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$2\pi\nu_s\left(t-\frac{y}{c}\right)=2\pi\nu_s\left(\frac{t'+\frac{\mathrm{v}}{c^2}y'}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{y'+\mathrm{v}t'}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right);$$ $$2\pi\nu_{obs}\left(t'-\frac{y'}{c}\right)=2\pi\nu_s\left(\frac{t'+\frac{\mathrm{v}}{c^2}y'}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{y'+\mathrm{v}t'}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$ din care, identificând coeficienții lui t' și y', din stânga și din dreapta relației, rezultă: $$\nu_{obs}=\nu_s\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$		
b)	**3 p**	
Originea O″ este un punct în mișcare cu viteza $\vec{u}'$ față de sistemul mobil S′ și în mișcare cu viteza $\vec{u}$ față de sistemul fix S, componentele celor două viteze fiind: $$\vec{u}'\ (u'_{x'}=0;\ u'_{y'}=\mathrm{v};\ u'_{z'}=0);$$ $$\vec{u}\ (u_x;\ u_y;\ u_z),$$ astfel încât relațiile dintre aceste componente sunt: $$u_x=\frac{u'_{x'}+\mathrm{v}_0}{1+\frac{u'_{x'}\mathrm{v}_0}{c^2}}=\mathrm{v}_0;$$ $$u_y=\frac{u'_{y'}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_{x'}\mathrm{v}_0}{c^2}}=\mathrm{v}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}};$$ $$u_z=\frac{u'_{z'}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_{x'}\mathrm{v}_0}{c^2}}=0.$$		
Mișcarea punctului O″ în raport cu O fiind rectilinie și uniformă, cu viteza $\vec{u}$, din figura 4, rezultă: $$\overrightarrow{OO''}=\vec{u}\,t;$$ $$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{u_y}{u_x}=\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}.$$		

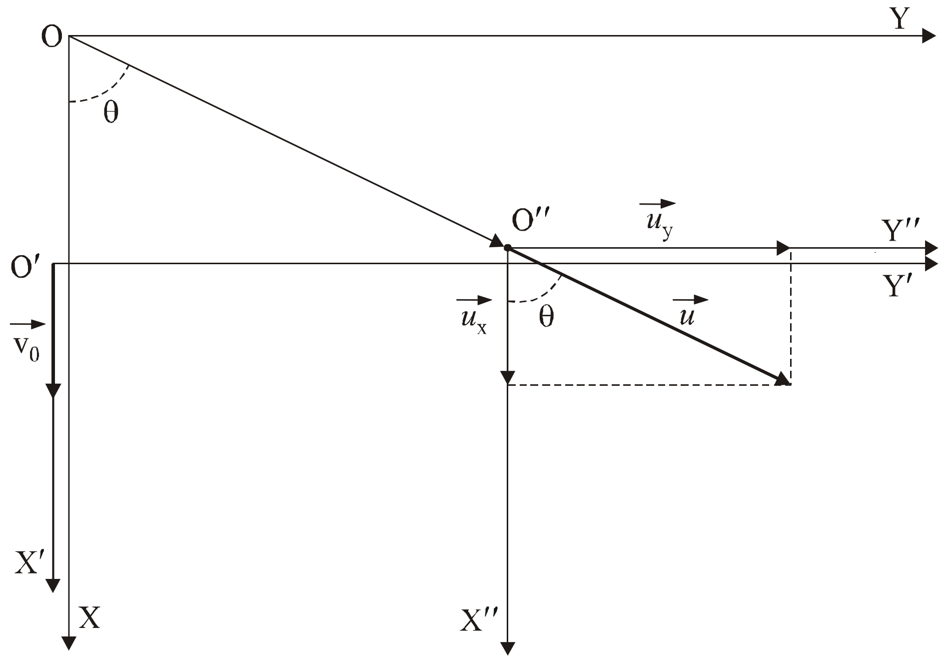


Fig. 4

Mişcarea punctului O în raport cu O″ fiind rectilinie și uniformă, cu viteza $\vec{u}''$, din figura 5 rezultă:

$$\overrightarrow{O''O} = \vec{u}''\,t'';$$

$$\text{tg}\,\theta'' = \frac{u''_{y''}}{u''_{x''}} = \frac{\text{v}}{\text{v}_0\sqrt{1-\dfrac{\text{v}^2}{c^2}}}.$$

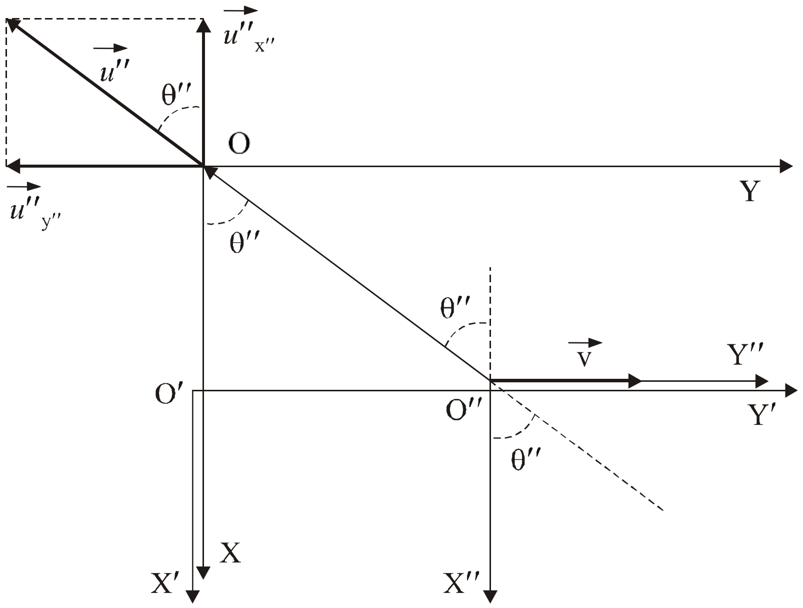


Fig. 5

Dacă $v_0 << c$ şi $v << c$, rezultă:

$$\text{tg}\,\theta \approx \frac{v}{v_0}\left(1-\frac{v_0^2}{2c^2}\right);\ \text{tg}\,\theta'' \approx \frac{v}{v_0}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Dacă $v << v_0$, rezultă:

$$\text{tg}\,\theta \approx \theta = \frac{v}{v_0}\left(1-\frac{v_0^2}{2c^2}\right);$$

$$\text{tg}\,\theta'' \approx \theta'' = \frac{v}{v_0}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right);$$

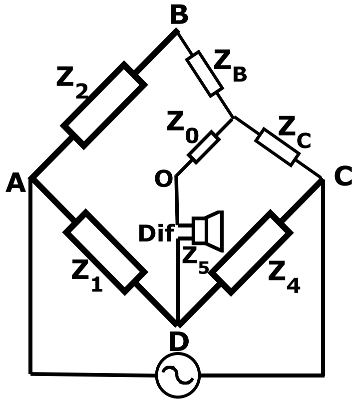
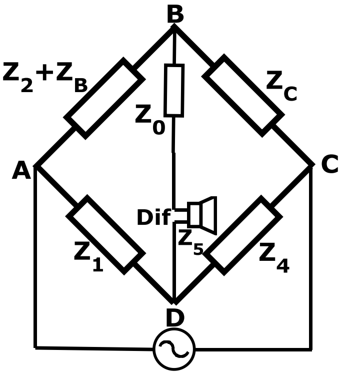
$$\theta''-\theta = \frac{v}{v_0}\left(\frac{v^2}{2c^2}+\frac{v_0^2}{2c^2}\right);$$

$$\theta''-\theta \approx \frac{v_0 v}{2c^2}.$$

c) **3 p**

Dacă într-un punct $P \in S$, de coordonate (x, y, z), s-a produs un eveniment la ora t, atunci, raportat la sistemul S', evenimentul considerat s-a produs în punctul P', de coordonate (x', y', z') la ora t', astfel încât, în acord cu transformările Lorentz, avem:

$$x' = \frac{x - \mathrm{v}_0 t}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}};\ y' = y;\ z' = z;$$ $$t' = \frac{t - \frac{x\mathrm{v}_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}}.$$ Dacă indicațiile ceasornicelor din P′ și P, corespunzătoare producerii aceluiași eveniment sunt identice, $t' = t$, rezultă: $$t = \frac{t - \frac{x\mathrm{v}_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}};$$ $$x = \frac{c^2}{\mathrm{v}_0}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}\right]t;$$ $$x' = \frac{\frac{c^2}{\mathrm{v}_0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}\right) - \mathrm{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_0^2}{c^2}}}t.$$		
Oficiu		**1,00**

Problema 2 – Punți peste …. punți	**Parţial**	**Punctaj**
Barem problema 2		**10**
a) Galvanometrul indică zero, dacă $U_{BD}=0 \Leftrightarrow V_B=V_D$ (1) sau $V_A-V_B=V_A-V_D \Leftrightarrow U_{AB}=U_{AD} \Leftrightarrow I_1R_1=I_4R_4$ (2) Tot din (1) : $V_B-V_C=V_D-V_C \Leftrightarrow U_{BC}=U_{DC} \Leftrightarrow I_2R_2=I_3R_3$ (3) Dar, dacă $I_G=0$, avem $I_1=I_2$ și $I_4=I_3$ și din (2) și (3) se obține $\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_4}{R_3}$ sau $R_1R_3=R_2R_4$ ceea ce reprezintă condiția de echilibru căutată.	1p	
În cazul punții de curent alternativ, având în vedere că legile circuitelor își păstrează forma matematică, dacă se lucrează în mulțimea numerelor complexe, condiția de echilibru devine: $\underline{Z}_1\underline{Z}_3=\underline{Z}_2\underline{Z}_4$ (4) unde prin $\underline{Z}_k$ am notat impedanța complexă a unui element *k* (*k* = 1,2,3,4) din punte.	1p	
Particularitatea în acest caz, constă în faptul că relația conține de fapt două condiții care trebuie îndeplinite simultan și care rezultă din egalarea părților reală și imaginară a celor doi membri ai ecuației (4). Există două condiții, pentru că nu este suficient ca punctele B și D să aibă aceeași valoare a potențialului, ci mai trebuie ca și fazele potențialelor celor două puncte să fie egale.	1p	
b) Transfigurând triunghiul OBC în stea rezultă schema din fig. 1, apoi fig.2., adică o punte Wheatstone.		
 **fig.1**  **fig.2** Condiția de echilibru este: $\underline{Z}_1\underline{Z}_C=\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_2+\underline{Z}_B\right)$	1p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr>
<td>
Dar,

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_7}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7} \quad \text{și}$$

$$\underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_6}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7}$$

Înlocuindu-le în condiția de echilibru, prin calcule elementare se ajunge la condiția de echilibru a punții Anderson:

$\underline{Z}_7 \left(\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 \right) = \underline{Z}_4 \left[\underline{Z}_6 \left(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \right) + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \right]$
</td>
<td>1p</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>În condiții de echilibru, dacă $\underline{Z}_6 = 0$ și $\underline{Z}_7 \to \infty$, puntea se reduce la o punte Wheatstone echilibrată.</td>
<td>1p</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
c) i) Pierderile într-un condensator se caracterizează prin unghiul de pierderi δ, care pentru condensatorul ideal, când defazajul dintre tensiune și intensitate este $90°$, este zero.

Pentru modelul serie al condensatorului real , adică

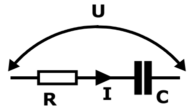
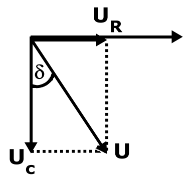


Diagrama fazorială este



și

$$\text{tg}\delta = \frac{U_R}{U_C} = \omega RC$$

Pentru modelul paralel al condensatorului real,

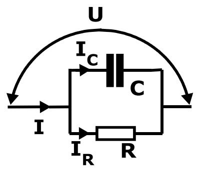
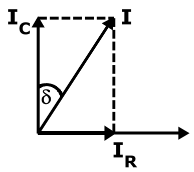


diagrama fazorială este



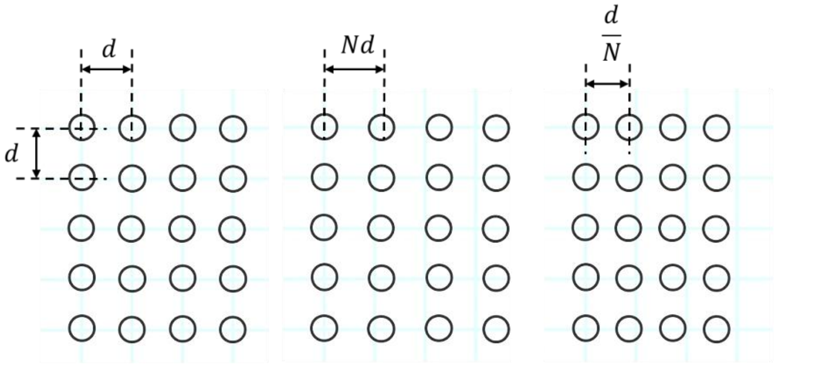
de unde

$$\text{tg}\delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{1}{\omega RC}$$

Dacă unghiul de pierderi este mai mic, pierderile sunt mai mici, deci în primul caz, pentru R mic se obțin pierderi mici, iar în al doilea caz, pentru R mare.
</td>
<td>1p</td>
<td></td>
</tr>
</table>

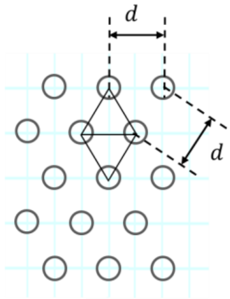
Prin urmare, pentru condensatoare cu pierderi mici se întrebuințează schema echivalentă serie, iar pentru condensatoare cu pierderi mari, schema echivalentă paralel. Așadar, în fig.3 din enunț, C_1 *este un condensator cu pierderi mari, iar* C_2 *cu pierderi mici.*		
ii) Impedanțele complexe ale celor patru ramuri ale punții Wien sunt: $\underline{Z}_1 = \dfrac{R_1\dfrac{X_{C1}}{j}}{R_1+\dfrac{X_{C1}}{j}} = \dfrac{R_1}{1+j\omega R_1C_1}$ $\quad \underline{Z}_2 = R_2+\dfrac{1}{j\omega C_2} \quad \underline{Z}_3 = R_3 \;;\; \underline{Z}_4 = R_4$ Înlocuind acestea în condiția de echilibru (4), rezultă $$\frac{R_1R_3}{1+j\omega R_1C_1} = R_4\left(R_2+\frac{1}{j\omega C_2}\right)$$ De unde rezultă ușor cele două condiții de echilibru care trebuie îndeplinite simultan: $\omega^2 = \dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}$ și $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{R_3}{R_4} - \dfrac{R_2}{R_1}$	1p	
iii) Dacă $R_3 = R_4$, atunci a doua condiție de echilibru devine $$\frac{C_1}{C_2} = 1-\frac{R_2}{R_1}$$ Care împreună cu condiția întâia permite aflarea lui C_1: $$C_1 = \frac{C_2}{1+(\omega R_2C_2)^2}$$ Folosind valorile din tabel se calculează pentru fiecare determinare C_1. Tabelul va arăta acum: (vezi tabelul de mai jos) De aici se obține $\overline{C_1} = 1{,}0122\ \text{nF}$ și $\left\|\Delta C_1\right\| = 0{,}035\ \text{nF}$. Așadar, a doua zecimală este afectată de eroare, deci $C_1 = (1{,}01 \pm 0{,}03)\ \text{nF}$	1p	
Oficiu		**1p**

Nr.crt.	C_2 (μF)	R_2 (Ω)	C_1 (nF)
1	0,022	$3{,}3\cdot 10^4$	1,009
2	0,047	$2{,}3\cdot 10^4$	0,997
3	0,068	$2\cdot 10^4$	0,918
4	0,22	10^4	1,145
5	0,47	$7{,}3\cdot 10^3$	1,009
6	0,68	$6\cdot 10^3$	1,033
7	2,2	$3{,}4\cdot 10^3$	0,995
8	4,7	$2{,}3\cdot 10^3$	1,019
9	22	1073	1,000
10	47	735	0,997

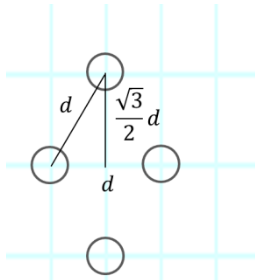
Problema 3 – Rețele de difracție	**Parțial**	**Punctaj**
A. a1. Din condiția de maxim de difracție $d(\sin\theta_{inc} - \sin\theta) = m\lambda$	1p	**4p**
rezultă în condițiile problemei $m = 1$ și $\theta = -\theta_{inc}$, $2d\sin\theta_{inc} = \lambda$, de unde $d = \frac{c}{2\nu\sin\theta_{inc}}$. Numeric $d = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^{15}\cdot 0{,}08} = 1{,}87\mu\text{m}$	1p	
a2. Din $2d\sin\theta = \lambda$ rezultă $2d\cos\theta\,\Delta\theta = \Delta\lambda$	1p	
Numeric $\Delta\lambda = 2\cdot 1{,}87\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}99\cdot\frac{\pi}{180}5 = 0{,}32\mu m$	1p	
B. b1. În baza figurii din text, dacă A (x_1, y_1) și B (x_2, y_2) sunt două puncte oarecare de pe rețea, diferența de drum geometric până într-un punct P (x', y') oarecare de pe ecran este: $\Delta r = AP - BP$, $AP = \sqrt{L^2 + (x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2} \cong \sqrt{L^2 + x'^2 + y'^2 - 2(x'x_1 + y'y_1)}$, $AP = \sqrt{L^2 + x'^2 + y'^2}\sqrt{1 - \frac{2(x'x_1 + y'y_1)}{L^2 + x'^2 + y'^2}} \cong L\left(1 - \frac{x'x_1 + y'y_1}{L^2}\right)$, deoarece $x_1^2 \ll L^2, y_1^2 \ll L^2$ și $x'^2 \ll L^2$, $y'^2 \ll L^2$ analog $BP = L\left(1 - \frac{x'x_2 + y'y_2}{L^2}\right)$, de unde $\Delta r = \frac{x'\Delta x + y'\Delta y}{L}$.	1p	
Din condiția de maxim de interferență $\Delta r = m\lambda, m = 0,1,2$ ... conduce la $\frac{x'\Delta x + y'\Delta y}{L} = m\lambda$. Dar $\Delta x = n_x d$ și $\Delta y = n_y d$ astfel că $n_x x' + n_y y' = \frac{m\lambda L}{d}$. Rezultă că pentru o celulă în formă de pătrat cu latura d figura de difracție va fi tot un pătrat cu latura $\frac{\lambda L}{d}$. Dacă membrana este alungită orizontal de N ori atunci dimensiunea orizontală a ”celulei” imaginii devine $\frac{\lambda L}{Nd}$. Astfel $d'_x = \frac{\lambda L}{Nd}$ și $d'_y = \frac{\lambda L}{d}$, de unde $d = \frac{\lambda L}{d'_y}$, $d = 0{,}1$ mm.	1p	
b2.  rețeaua pătratică — rețeaua pătratică alungită orizontal — figura de difracție a rețelei alungite orizontal $N = \frac{\lambda L}{d'_x d} = 4$	1p	

<table>
<tr><td>

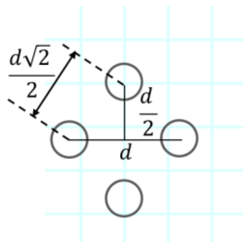
C.c1.



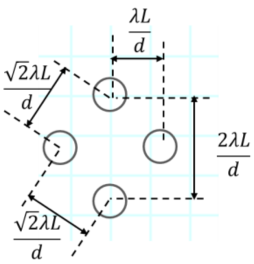
rețeaua triunghiulară



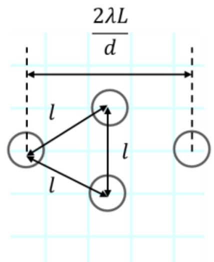
rețeaua triunghiulară



rețeaua triunghiulară comprimată vertical de $\sqrt{3}$ ori transformată în rețea pătratică



Imaginea celulei pătratice – imaginea alungită vertical de $\sqrt{3}$ ori a celulelor triunghiulare



Imaginea de difracție a rețelei triunghiulare - obținută prin comprimarea verticală de $\sqrt{3}$ ori a imaginii rețelei pătratice

</td><td>1p</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>

c2. $l = \frac{2\lambda L}{\sqrt{3}d}$, $l = 9{,}74$ mm

</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>Oficiu</td><td></td><td>1p</td></tr>
</table>

Barem propus de:
prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism, *Călimănești*
prof. Liviu ARICI, Colegiul Național ”Nicolae Bălcescu”, *Brăila*
prof. Constantin GAVRILĂ – Colegiul Național Sfântul Sava, *București*

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.