Subiectul I:

Soluție A: (2p)

a1. (1p) Legea a II a lui Kirchhoff pentru ochiul format prin închiderea întrerupătorului, în mărimi momentane, are forma:

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = iR \text{ sau } L\frac{di}{dt} + iR - \mathcal{E} = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

La momentul inițial intensitatea curentului electric din circuit este nulă, $i(0) = 0$ astfel că legea lui Kirchhoff scrisă anterior devine:

$$L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \mathcal{E}.$$

Prin urmare la momentul $t = 0$ vom obține

$$L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -AR = \mathcal{E}\ ,$$

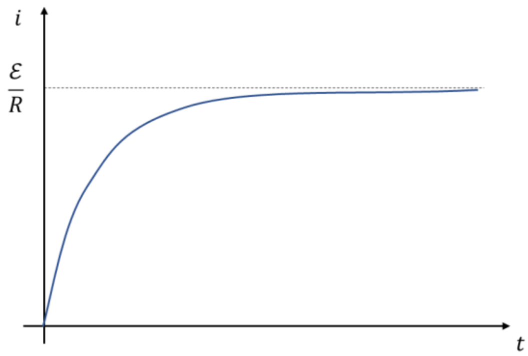
iar de aici ajungem la:

$$A = -\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Soluția finală va fi:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

a2. (1p)



Soluție B: (2p)

b1. (1p) Legea a II a lui Kirchhoff pentru ochiul format prin închiderea întrerupătorului, în mărimi momentane, are forma:

$$\mathcal{E} = iR + \frac{1}{C}q, \text{ respectiv } R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q - \mathcal{E} = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$q(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + \mathcal{E}C.$$

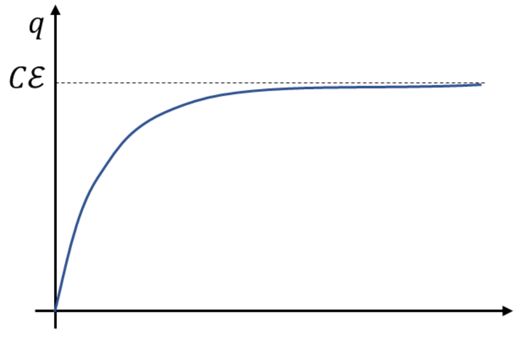
La momentul inițial $q(0) = 0$ astfel că

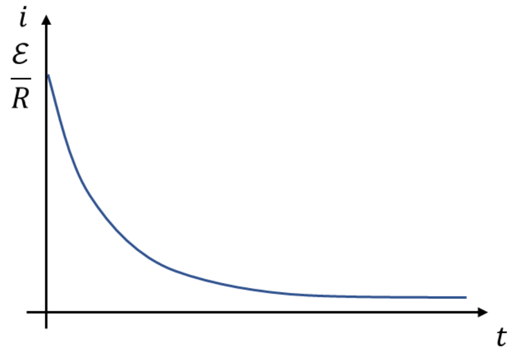
$$A = -\mathcal{E}C.$$

Soluția finală va fi

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right), \text{ iar } i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

b2. (1p)





Soluție C: (2p)

c1. (1p) Folosim legea I, a lui Kirchhoff scrisă pentru nodul din stânga

$$i = i_1 + i_2$$

și legea a II a lui Kirchhoff pentru cele două ochiuri care conțin sursa

$$\begin{cases} \mathcal{E} - L\dfrac{di_1}{dt} = i_1 R_1 \\ \mathcal{E} = i_2 R_2 + \dfrac{1}{C} q \end{cases}$$

Deoarece sursa nu are rezistență electrică internă, expresiile pentru intensitățile i_1 și i_2 sunt de forma celor determinate la punctele precedente, astfel că pentru intensitatea curentului care parcurge sursa putem scrie:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right) + \frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-\frac{1}{R_2 C}t}.$$

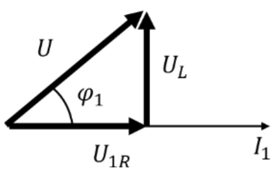
c2. (1p) Dacă $R_1 = R_2 = R$ atunci

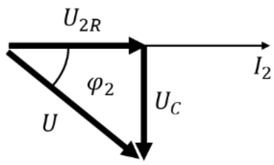
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ sau } i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{\mathcal{E}}{R}\left(e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

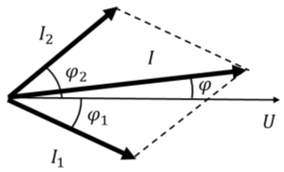
Intensitatea este independentă de L și C dacă $e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{R}{L}t} = 0$ adică $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Soluție D: (4p)

d1. (1p)







d2. (3x0,5p) $P = UI\cos\varphi$, iar $S = UI$ și prin urmare valoarea raportului cerut este $\frac{P}{S} = \cos\varphi$.

Impedanța complexă a circuitului este dată de relația:

$$\bar{Z} = \frac{(R + jX_L)(R - jX_C)}{2R + j(X_L - X_C)} = R\frac{2R^2 + X_L^2 + X_C^2}{4R^2 + (X_L - X_C)^2} + j(X_L - X_C)\frac{R^2 - X_L X_C}{4R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

În condițiile din enunțul problemei, $R^2 = \frac{L}{C}$ partea imaginară a impedanței complexe devine nulă astfel că $\varphi = 0$ și în consecință $\frac{P}{S} = 1$.

d3. (3x0,5p) Din expresia impedanței (complexe) de la punctul d2 se observă că :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\omega \to 0} Z = R \\ \lim\limits_{\omega \to \infty} Z = R \end{cases} \Leftrightarrow \quad I_{lim} = \frac{U}{R}$$

Analizând partea imaginară a impedanței complexe observăm că pentru $X_L = X_C$, respectiv la $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ aceasta devine nulă, Im $\bar{Z} = 0$ astfel că $Z(\omega_0) \stackrel{\text{def}}{=} Z_0 = \frac{R^2+\frac{L}{C}}{2R} \quad \Leftrightarrow \quad I_0 = \frac{U}{Z_0}$

Analizăm valoarea raportului $\frac{Z_0}{R} = \frac{R^2+\frac{L}{C}}{2R^2}$ în funcție de mărimile R, L și C:

i) Dacă $\frac{Z_0}{R} > 1$ atunci $\frac{R^2+\frac{L}{C}}{2R^2} > 1$ și deci $R^2 < \frac{L}{C}$;

ii) Dacă $\frac{Z_0}{R} = 1$ atunci $\frac{R^2+\frac{L}{C}}{2R^2} = 1$ și deci $R^2 = \frac{L}{C}$;

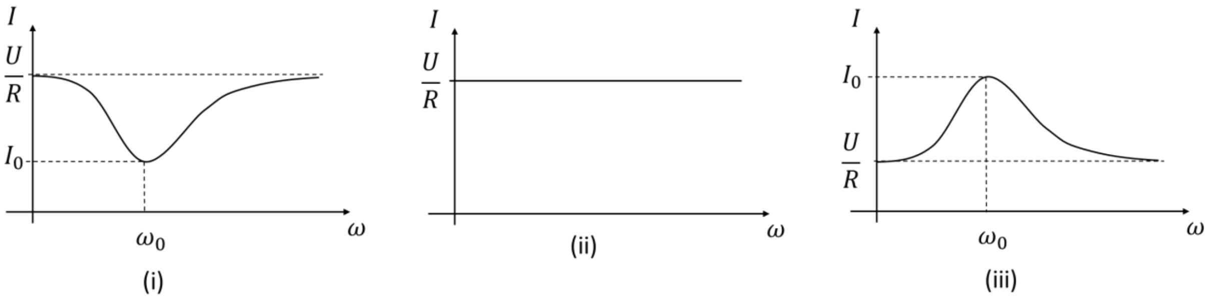
iii)Dacă $\frac{Z_0}{R} < 1$ atunci $\frac{R^2+\frac{L}{C}}{2R^2} < 1$ și deci $R^2 > \frac{L}{C}$.

Prin urmare:

i) în situația $R^2 < \frac{L}{C}$, la pulsația $\omega = \omega_0$, se obține $Z_0 > R$, respectiv $I_0 = \frac{U}{Z_0} < \frac{U}{R}$;

ii) în situația $R^2 = \frac{L}{C}$ se obține $Z = R$, pentru orice pulsație ω, respectiv $I = \frac{U}{R}$;

iii) în situația $R^2 > \frac{L}{C}$, la $\omega = \omega_0$, se obține $Z_0 < R$, respectiv $I_0 = \frac{U}{Z_0} > \frac{U}{R}$.



(10 puncte)

Subiectul II: (10 puncte)

Rezolvare + punctaj evaluare

a) 4,0 puncte

a₁) 2,0 puncte

Pentru început să analizăm cazul general, când direcția deplasării observatorului (direcția vectorului viteză, $\vec{v}$), în raport cu sursa de oscilații, S, este așa cum indică desenul din figura 4.

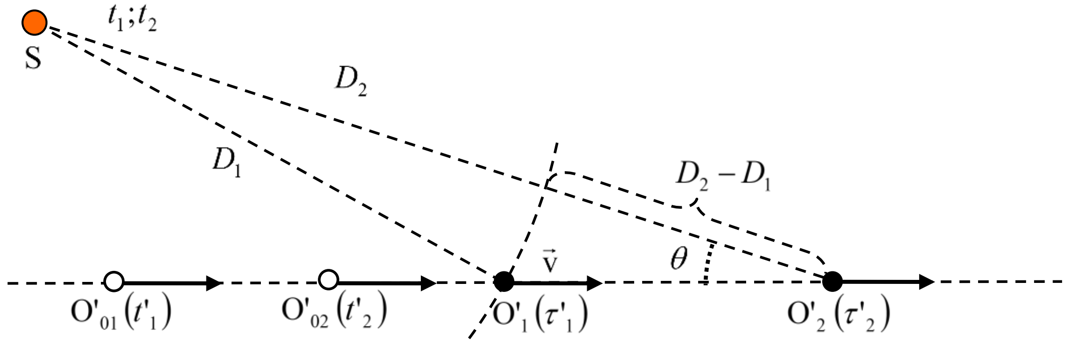


Fig. 4

Să considerăm acum că emisia undelor de la sursa de oscilații S, aflată în repaus, reprezentată în desenul din figura 4, începe la ora t_1 (raportată la ceasornicul propriu), atunci când observatorul mobil, O', în mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $\vec{v}$, se află în poziția O'_{01}, ceasornicul său indicînd ora t_1'.

Încheierea celor N oscilații ale sursei S se face la ora t_2 (raportată la ceasornicul sursei), atunci când observatorul mobil se află în poziția O'_{02}, când ceasornicul acestuia indică ora t'_2, astfel încât intervalul de timp necesar producerii celor N oscilații, când sursa S rămâne fixă, raportat la ceasornicele asociate celor două sisteme de referință, fix (asociat sursei, S) și respectiv mobil (asociat observatorului mobil, O'), sunt:

$$\Delta t = t_2 - t_1;\ \Delta t' = t'_2 - t'_1 \neq \Delta t,$$

relația dintre acestea fiind:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t;\ \Delta t = \sqrt{1-\beta^2}\cdot \Delta t' < \Delta t'.$$

În aceste condiții recepția celor N oscilații produse de sursa fixă S, va începe, la observatorul mobil, O', atunci când acesta se află în poziția O'_1, când ceasorincul său indică ora :

$$\tau'_1 = t'_1 + \frac{D_1}{c},$$

și se va încheia, atunci când observatorul mobil se va afla în poziția O'_2, la ora:

$$\tau'_2 = t'_2 + \frac{D_2}{c},$$

astfel încât durata recepției celor N oscilații, cronometrată de observatorul mobil O, va fi:

$$\Delta\tau' = \tau'_2 - \tau'_1 = t'_2 - t'_1 + \frac{D_2 - D_1}{c};$$

$$\Delta\tau' = \Delta t' + \frac{D_2 - D_1}{c};$$

$$D_2 - D_1 \approx (\mathrm{O'}_1\mathrm{O'}_2)\cdot\cos\theta;$$
$$\mathrm{O'}_1\mathrm{O'}_2 = \mathrm{v}\cdot\Delta t';$$
$$D_2 - D_1 = \mathrm{v}\cdot\Delta t'\cdot\cos\theta;$$
$$\Delta\tau' = \Delta t' + \frac{\mathrm{v}\cdot\cos\theta}{c}\Delta t';$$
$$\Delta\tau' = \Delta t' + \beta\cos\theta\cdot\Delta t';$$
$$\Delta\tau' = (1+\beta\cos\theta)\cdot\Delta t';$$
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}};$$
$$\Delta\tau' = (1+\beta\cos\theta)\cdot\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

În aceste condiții, numărul *N* al oscilațiilor, produse de sursa fixă, S, este:

$$N = \nu_{\text{Sursa}}\cdot\Delta t,$$

iar același număr de ocilații, *N*, recepționate de observatorul mobil, O', este:

$$N = \nu_{\text{Observator}}\cdot\Delta\tau' = \nu_{\text{Observator}}\cdot(1+\beta\cos\theta)\cdot\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

astfel încât obținem:

$$\nu_{\text{Observator}}\cdot(1+\beta\cdot\cos\theta)\cdot\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu_{\text{Sursa}}\cdot\Delta t;$$
$$\nu_{\text{Observator}}\cdot(1+\beta\cdot\cos\theta)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu_{\text{Sursa}};$$
$$\nu_{\text{Observator}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cdot\cos\theta}\cdot\nu_{\text{Sursa}};$$
$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1+\beta\cdot\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând relațiile dintre frecvențele și lungimile de undă ale undelor, raportate la sursa de oscialții fixă și la observatorul mobil.

Cazuri particulare:

1. $\theta = 180^0$;

$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} < \lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând efectul Doppler relativist longitudinal, când observatorul se apropie de sursă;

2. $\theta = 0^0$;

$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} > \lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând efectul Doppler relativist longitudinal, când observatorul se depărtează de sursă;

3. $\theta = 90^0$;

$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} > \lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând efectul Doppler relativist transversal, pentru care nu există un corespondent clasic.

Efectul Doppler relativist transversal dovedește că și atunci când direcția de propagare a luminii spre observator este perpendiculară pe direcția de mișcare a sursei, frecvența și lungimea de undă ale radiației înregistrate de observator sunt diferite de cele ale radiației emise. Variațiile acestora sunt însă mult mai mici decât cele corespunzătoare efectului Doppler relativist longitudinal.

a$_2$) 2,0 puncte

Să considerăm acum că emisia oscilațiilor de la sursa de oscilații, $\mathrm{S'}$, aflată în mișcare cu viteza $\vec{\mathrm{v}}$, începe în poziția $\mathrm{S'_1}$ a acesteia, reprezentată în desenul din figura 5, la ora t'_1 (raportată la ceasornicul propriu), atunci când ceasornicul observatorului fix, O, indică ora t_1.

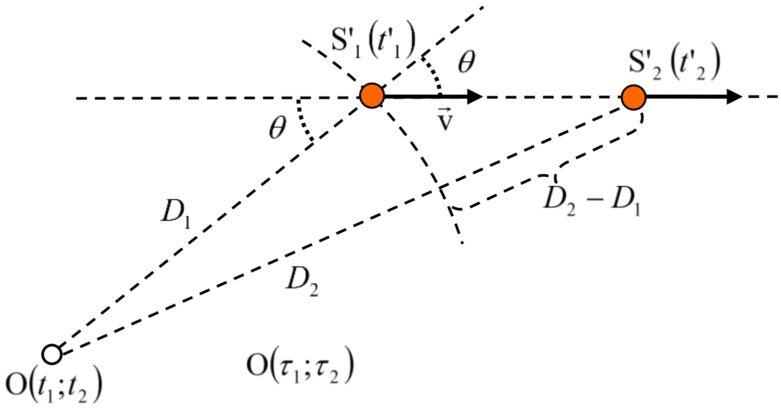


Fig. 5

Încheierea emisiei celor N oscilații electromagnetice ale sursei mobile se face în poziția $\mathrm{S'_2}$ a acesteia, la ora t'_2 (raportată la ceasornicul sursei), atunci când ceasornicul observatorului fix, O, indică ora t_2, astfel încât durata producerii celor N oscilații, din poziția S a sursei fixe, raportată la ceasornicele asociate celor două sisteme de referință, fix (asociat observatorului, O) și respectiv mobil (asociat sursei, $\mathrm{S'}$), sunt:

$$\Delta t = t_2 - t_1;\ \Delta t' = t'_2 - t'_1 \neq \Delta t,$$

relația dintre acestea fiind:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t';\ \Delta t' = \sqrt{1-\beta^2}\cdot \Delta t < \Delta t.$$

În aceste condiții recepția celor N oscilații emise de sursa mobilă, $\mathrm{S'}$, va începe, la observatorul fix, acesta fiind în poziția O, când ceasorincul său indică ora :

$$\tau_1 = t_1 + \frac{D_1}{c},$$

și se va încheia, observatorul rămânând în poziția O, la ora:

$$\tau_2 = t_2 + \frac{D_2}{c},$$

astfel încât durata recepției celor N oscilații, determinată de observatorul fix, O, va fi:

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = t_2 - t_1 + \frac{D_2 - D_1}{c};$$

$$\Delta\tau = \Delta t + \frac{D_2 - D_1}{c};$$

$$D_1 - D_2 \approx (\mathrm{S'_1 S'_2})\cdot\cos\theta = \mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\cos\theta;$$

$$\mathrm{S'_1 S'_2} = \mathrm{v}\cdot\Delta t;$$

$$\Delta\tau = \Delta t + \frac{\mathrm{v}\cdot\cos\theta}{c}\Delta t;$$

$$\Delta\tau = (1+\beta\cos\theta)\cdot\Delta t;\ \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t';$$

$$\Delta\tau = (1+\beta\cos\theta)\cdot\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

În aceste condiții, numărul N al oscilațiilor, produse de sursa mobilă, $\mathrm{S'}$, este:

$$N = \nu_{\text{Sursa}}\cdot\Delta t',$$

iar același număr de ocilații, N, recepționate de observatorul mobil, O, este:

$$N = \nu_{\text{Observator}}\cdot\Delta\tau = \nu_{\text{Observator}}\cdot(1+\beta\cos\theta)\cdot\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

astfel încât obținem:

$$\nu_{\text{Observator}} \cdot (1+\beta\cdot\cos\theta)\cdot\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu_{\text{Sursa}} \cdot \Delta t';$$

$$\nu_{\text{Observator}} \cdot (1+\beta\cdot\cos\theta)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu_{\text{Sursa}};$$

$$\nu_{\text{Observator}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cdot\cos\theta}\cdot\nu_{\text{Sursa}};$$

$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1+\beta\cdot\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând relațiile dintre frecvențele și lungimile de undă ale radiațiilor electromagnetice, raportate la sursa de lumină mobilă și la observatorul fix, aceleași cu cele din cazul analizat anterior.

Cazuri particulare:

1) $\theta = 180^0$;

$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} < \lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând efectul Doppler relativist longitudinal, când observatorul se apropie de sursă;

2) $\theta = 0^0$;

$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} > \lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând efectul Doppler relativist longitudinal, când observatorul se depărtează de sursă;

3) $\theta = 90^0$;

$$\lambda_{\text{Observator}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} > \lambda_{\text{Sursa}},$$

reprezentând efectul Doppler relativist transversal, pentru care nu există un corespondent clasic.

b) 1,0 puncte

Naveta spațială se apropie de sursa fixă (becul 1), astfel încât lungimea de undă a radiației observate de conducătorul acesteia, în acord cu efectul Doppler longitudinal, este dată de expresia:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}(1-\beta)/\sqrt{1-\beta^2};\ \lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};$$

$$\beta = \frac{\text{v}}{c};\ \lambda_{\text{obs}} < \lambda_{\text{sursa}};$$

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{verde}};\ \lambda_{\text{sursa}} = \lambda_{\text{rosu}};$$

$$\lambda_{\text{v}} < \lambda_{\text{r}},$$

astfel încât rezultă:

$$\lambda_{\text{verde}} = \lambda_{\text{rosu}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};\ \beta = \frac{\text{v}}{c};$$

$$\beta = \frac{\lambda_{\text{r}}^2 - \lambda_{\text{v}}^2}{\lambda_{\text{r}}^2 + \lambda_{\text{v}}^2} = \frac{\text{v}}{c};$$

$$\lambda_{\text{roșu}} = 6{,}5\cdot10^{-5}\ \text{cm};\ \lambda_{\text{verde}} = 5\cdot10^{-5}\ \text{cm};$$

$$\text{v} = c\,\frac{\lambda_{\text{r}}^2 - \lambda_{\text{v}}^2}{\lambda_{\text{r}}^2 + \lambda_{\text{v}}^2} = 0{,}25\cdot c;\ \beta = \frac{\text{v}}{c} = 0{,}25.$$

c) 1,0 puncte

După trecerea prin intersecție, naveta spațială se depărtează de sursa fixă (becul 2), astfel încât lungimea de undă a radiației observată de conducătorul acesteia este dată de expresia:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}(1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2};\ \lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};\ \lambda_{\text{obs}} > \lambda_{\text{sursa}}.$$

c₁) Mai întâi să considerăm că pe durata trecerii navetei spațiale prin intersecție nu s-au schimbat culorile luminii de pe becurile celor două sensuri, adică: 1 – Roșu; 2 – Verde. Ca urmare, după trecerea prin intersecție, naveta spațială se depărtează de sursa (becul 2) care emite radiație Verde. În aceste condiții lungimea de undă a radiației observate este:

$$\lambda_{\text{obs}} > \lambda_{\text{sursa}};\ \lambda_{\text{sursa}} = \lambda_{\text{verde}};\ \lambda_{\text{obs}} > \lambda_{\text{verde}};$$

$$\lambda_{\text{roșu}} = 6{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{cm};\ \lambda_{\text{verde}} = 5\cdot 10^{-5}\ \text{cm};$$

$$\text{v} = 0{,}25\cdot c;$$

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};\ \beta = \frac{\text{v}}{c} = 0{,}25;$$

$$\lambda_{\text{obs}} = 6{,}45\cdot 10^{-5}\ \text{cm} \approx \lambda_{\text{rosu}}.$$

Concluzie: privind în oglinda retrovizoare, imediat după trecerea prin intersecție, conducătorul navetei spațiale, apreciază ca fiind Roșie lumina de culoare Verde emisă de becul (2) de pe sensul invers.

c₂) Să considerăm acum că pe durata trecerii navetei spațiale prin intersecție, s-au schimbat culorile luminii de pe becurile celor două sensuri, adică: 1 – Verde; 2 – Roșu. Ca urmare naveta spațială se depărtează de sursa fixă (becul 2), care emite radiație Roșie. În aceste condiții lungimea de undă a radiației observate este:

$$\lambda_{\text{obs}} > \lambda_{\text{sursa}};\ \lambda_{\text{sursa}} = \lambda_{\text{rosu}};\ \lambda_{\text{obs}} > \lambda_{\text{rosu}};$$

$$\lambda_{\text{roșu}} = 6{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{cm};\ \lambda_{\text{verde}} = 5\cdot 10^{-5}\ \text{cm};$$

$$\text{v} = 0{,}25c;$$

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};\ \beta = \frac{\text{v}}{c} = 0{,}25;$$

$$\lambda_{\text{obs}} = 8{,}393\cdot 10^{-5}\ \text{cm} = 839{,}3\ \text{nm} > 760\ \text{nm}.$$

Concluzie: lungimea de undă a radiației Roșie, emisă de becul (2) de pe sensul invers, ajunge la conducătorul navetei spațiale cu o lungime de undă, $\lambda_{\text{obs}} = 8{,}393\cdot 10^{-5}\ \text{cm}$, mai mare decât limita superioară de sensibilitate spectrală a ochiului $(760\ \text{nm})$. De aceea, observatorul va aprecia, privind în oglinda retrovizoare, că becul de pe sens invers nu funcționează!

d) 1,0 puncte

Conducătorul navetei spațiale se apropie de sursa fixă (becul 1), astfel încât lungimea de undă a radiației observate, în acord cu efectul Doppler longitudinal, este dată de expresia:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}(1-\beta)/\sqrt{1-\beta^2};\ \lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};\ \ \beta = \frac{\text{v}}{c};$$

$$\lambda_{\text{obs}} < \lambda_{\text{sursa}}.$$

Dacă, apropiindu-se de becul 1, conducătorul navetei spațiale, apreciază că becul 1 nu funcționează, însemnează că lungimea de undă a radiației observate este mai mică decât limita inferioară a sensibilității spectrale a ochiului acestuia.

În aceste condiții culorile luminilor de pe cele două becuri sunt: 1 – Verde; 2 – Roșu, astfel încât rezultă:

$$\lambda_{\text{sursa}} = \lambda_{\text{verde}};\ \lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{min}} = 400\ \text{nm};$$

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{sursă}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};$$

$$\lambda_{\text{min}} = \lambda_{\text{verde}}(1-\beta)/\sqrt{1-\beta^2};\ \lambda_{\text{min}} = \lambda_{\text{verde}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};$$

$$\beta = \frac{\lambda_{\text{verde}}^2 - \lambda_{\text{min}}^2}{\lambda_{\text{verde}}^2 + \lambda_{\text{min}}^2};$$

$$\beta = 0{,}3 = \frac{\text{v}}{c};\ \text{v} = \beta c;\ \text{v} = 0{,}3\cdot c.$$

e) **1,0 puncte**

După trecerea prin intersecție, conducătorul navetei spațiale se depărtează de sursa fixă (becul 2), astfel încât lungimea de undă a radiației observate, în acord cu efectul Doppler longitudinal, este dată de expresia:

$$\lambda_{obs} = \lambda_{sursă}(1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2};\ \lambda_{obs} = \lambda_{sursă}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};$$

$$\beta = \frac{\mathrm{v}}{c};\ \lambda_{obs} > \lambda_{sursa}.$$

Dacă, depărtându-se de becul 2, conducătorul navetei spațiale, apreciază că becul 2 nu funcționează, înseamnă că lungimea de undă a radiației observate este mai mare decât limita superioară a sensibilității spectrale a ochiului acestuia.

e₁) Mai întâi să considerăm că, după trecerea navetei spațiale prin intersecție, culorile celor două becuri sunt: 1 – Verde; 2 – Roșu, astfel încât rezultă:

$$\lambda_{sursa} = \lambda_{rosu};\ \lambda_{obs} = \lambda_{max} = 760\ \mathrm{nm};$$

$$\lambda_{obs} > \lambda_{sursa}.$$

$$\lambda_{max} = \lambda_{rosu}(1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2};$$

$$\lambda_{max} = \lambda_{rosu}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};$$

$$\beta = \frac{\lambda_{max}^2 - \lambda_{rosu}^2}{\lambda_{max}^2 + \lambda_{rosu}^2};$$

$$\beta = 0{,}15 = \frac{\mathrm{v}}{c};\ \mathrm{v} = 0{,}15\cdot c.$$

e₂) Să considerăm acum că, după trecerea navetei spațiale prin intersecție, culorile celor două becuri sunt: 1 – Roșu; 2 – Verde, astfel încât rezultă:

$$\lambda_{sursa} = \lambda_{verde};\ \lambda_{obs} = \lambda_{max} = 760\ \mathrm{nm};$$

$$\lambda_{obs} = \lambda_{sursă}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};\ \lambda_{obs} > \lambda_{sursa};$$

$$\lambda_{max} = \lambda_{verde}(1+\beta)/\sqrt{1-\beta^2};$$

$$\lambda_{max} = \lambda_{verde}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}};$$

$$\beta = \frac{\lambda_{max}^2 - \lambda_{verde}^2}{\lambda_{max}^2 + \lambda_{verde}^2};$$

$$\beta = 0{,}395 = \frac{\mathrm{v}}{c};\ \mathrm{v} \approx 0{,}4\cdot c.$$

f) **1,0 puncte**

Corespunzător cazului general, reprezentat în desenul din figura 4, am demonstrat că:

$$\nu_{Observator} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cdot\cos\theta}\cdot\nu_{Sursa};\ \lambda_{Observator} = \frac{1+\beta\cdot\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{Sursa},$$

reprezentând relațiile dintre frecvențele și lungimile de undă ale radiațiilor electromagnetice, raportate la sursa de lumină fixă și la observatorul mobil.

Corespunzător cazului particular, $\theta = 90^0$, reprezentat în desenul din figura 6, când distanța dintre sursă și observator este minimă, reprezentând efectul Doppler relativist transversal, rezultă:

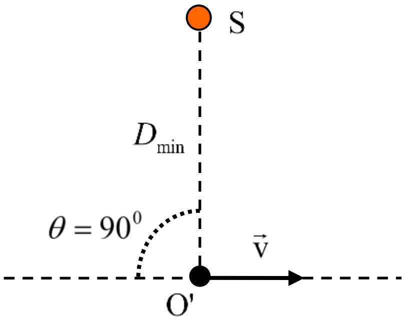


Fig. 6

$$\nu_{\text{Observator}} = \sqrt{1-\beta^2}\cdot\nu_{\text{Sursa}} < \nu_{\text{Sursa}};\ \lambda_{\text{Observator}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} > \lambda_{\text{Sursa}};\ \beta = \frac{\mathrm{v}}{c} = \frac{0{,}25\,c}{c} = 0{,}25;$$

$$\nu_{\text{Observator}} = \sqrt{1-\beta^2}\cdot\nu_{\text{Sursa}} < \nu_{\text{Sursa}};\ \lambda_{\text{Observator}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} > \lambda_{\text{Sursa}};\ \beta = 0{,}25;$$

f1) $\lambda_{\text{Sursa}} = \lambda_{\text{Rosu}};\ \lambda_{\text{Observator}} > \lambda_{\text{Sursa}};\ \lambda_{\text{Observator}} \approx 6{,}71\cdot 10^{-5}\ \text{cm} > \lambda_{\text{Rosu}};$

f2) $\lambda_{\text{Sursa}} = \lambda_{\text{Verde}};\ \lambda_{\text{Observator}} > \lambda_{\text{Sursa}};\ \lambda_{\text{Observator}} \approx 5{,}16\cdot 10^{-5}\ \text{cm} > \lambda_{\text{Verde}}.$

g) 1,0 puncte

În acord cu efectul Doppler transversal, corespunzător notațiilor din figura 7, rezultă:

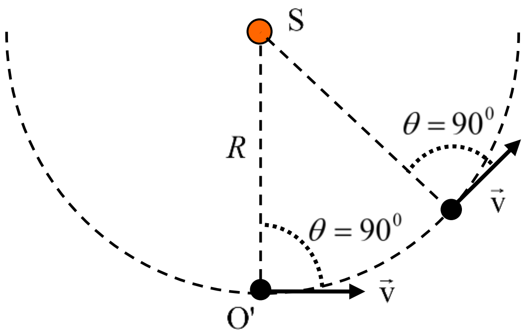


Fig. 7

$$\nu_{\text{Observator}} = \sqrt{1-\beta^2}\cdot\nu_{\text{Sursa}} < \nu_{\text{Sursa}};\ \lambda_{\text{Observator}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\lambda_{\text{Sursa}} > \lambda_{\text{Sursa}};$$

1) $\lambda_{\text{Sursa}} = \lambda_{\text{Rosu}};\ \lambda_{\text{Observator}} > \lambda_{\text{Sursa}};\ \lambda_{\text{Observator}} \approx 6{,}71\cdot 10^{-5}\ \text{cm} > \lambda_{\text{Rosu}};$

2) $\lambda_{\text{Sursa}} = \lambda_{\text{Verde}};\ \lambda_{\text{Observator}} > \lambda_{\text{Sursa}};\ \lambda_{\text{Observator}} \approx 5{,}16\cdot 10^{-5}\ \text{cm} > \lambda_{\text{Verde}}.$

Subiectul III: **(10 puncte)**

Barem:

A.

a) Utilizând condiția de cuantificare a momentului cinetic $r * p = n * \hbar$ și condiția de echilibru a orbitei $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 * r^2}$ se găsește că:

$r = \frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m e^2}$ ....1,5 puncte

Raza minimă corespunde valorii $n = 1$.

Înlocuind se obține:

$r_1 \cong 2 * 10^{-13}\ m$ care este de 264 de ori mai mică decât raza respectivă pentru un electron………………..0,5 puncte

b) Expresia energiei totale a electronului în stările legate depinde numai de masa electronului, sarcina electrică a acestuia și de sarcina electrică a nucleului (în aproximația propusă sarcina nucleului este $+e$.

$E_n = -\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} * \frac{1}{n^2}$, deci sunt aceleași cu ale atomului de hidrogen.

……………………… 1 punct

c) Pentru un atom cu numărul atomic Z raza orbitei este dată de relația:

$R_n = \frac{\hbar^2}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Z e^2 m} . n^2$.

Este necesar ca raza cea mai mică a orbitei să fie mai mare decât raza nucleului.

Rezultă $Z \leq 35{,}7$, deci $Z_{maxim} = 35$. ……………. 2 puncte

B.

a) Din relația pentru momentul cinetic:

$L = d_{K^+} m_{K^+} v_{K^+} + d_{\pi^-} m_{\pi^-} v_{\pi^-} = n\hbar$ și din relația de stabilitate a traiectoriei $\frac{m_{K^+} v_{K^+}^2}{d_{K^+}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d^2}$ unde d_{K^+} și d_{π^-} sunt distanțele celor două componente față de centrul comun de masă iar

$d = d_{K^+} + d_{\pi^-}$ este distanța dintre acestea se obține:

$d_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi \mu_r e^2} n^2$, unde am notat cu $\mu_r = \frac{m_{K^+} m_{\pi^-}}{m_{K^+} + m_{\pi^-}}$ masa redusă a sistemului.......................................1,5 puncte

Se observă că expresia distanței dintre cele două componente ale sistemului d_n diferă de expresia de cuantificare a razei atomului Bohr pentru hidrogen doar prin faptul că în loc de masa electronului m_e apare masa redusă μ_r. Din calcul rezultă că $\mu_r \cong 213 m_e$, deci $d_1 \cong \frac{r_1}{213} \cong 2{,}5 * 10^{-13}\ m$. …………………………………… 0,5 puncte

b) Din relația pentru energia totală

$$E = \frac{m_{K^+} v_{K^+}^2}{2} + \frac{m_{\pi^-} v_{\pi^-}^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Se obține

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$$

Utilizând relația de cuantificare a distanței se găsește:

$E_n = -\frac{e^4 \mu_r}{8\varepsilon_0^2 h^2} * \frac{1}{n^2}$...............1,5 puncte

Iar pentru energia nivelului fundamental:

$E_1 \cong -2900\ eV = -2{,}9\ keV$. …………………………. 0,5 puncte

c) $\lambda_{max} = \frac{hc}{|E_1|} \cong 4 * 10^{-10}\ m$ (foton de raze X)………………………….. 1 punct

Bareme propuse de:
prof. Florin BUTUȘINĂ – Colegiul Național ”Simion Bărnuțiu”, *Șimleu-Silvaniei*
prof. Constantin GAVRILĂ – Colegiul Național ”Sfântul Sava”*, București*
prof. dr. Mihail SANDU – Liceul Tehnologic de Turism*, Călimănești*
prof. Viorel SOLSCHI, – Colegiul Național „Mihai Eminescu” – *Satu Mare*