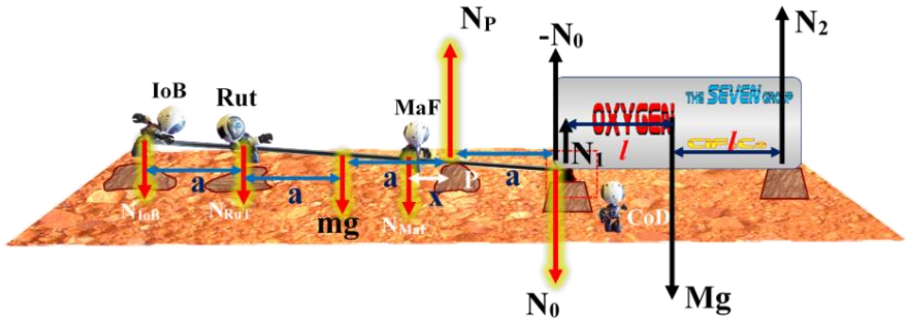
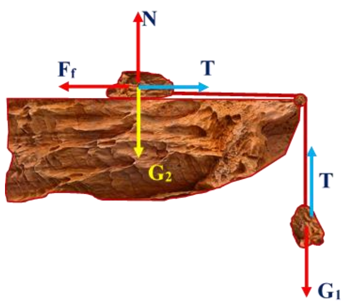
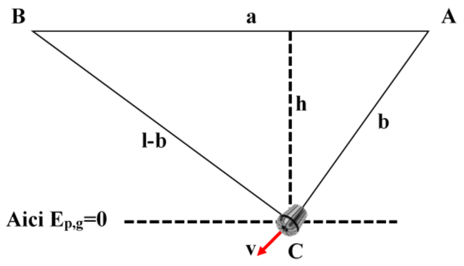
Subiectul I: **(10 puncte)**

	Parţial	**Punctaj**
a)		
La echilibru, la limita urcării pe obstacol: $2M = mg\sqrt{R^2-(R-h)^2}$. Rezultă: $h = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{2M}{mg}\right)^2} = 0,2\,\text{m}$.	2 1	**3**
b)		
Deoarece roboții sunt în echilibru mecanic, greutățile lor sunt egale în modul cu forțele de apăsare normală asupra lor. La rândul lor, aceștia apasă pe suprafața de contact cu aceeați forță de apăsare normală. 	1	**4**
Pentru rezervor se scrie: $2l(N_0 + N_1) - Mgl = 0$.	0,75	
Pentru țeavă: $3amg + 2amg + amg + xmg - N_0 a = 0$.	1	
Se elimină N_0 din aceste relații și rezultă expresia lui N_1: $N_1 = \frac{Mg}{2} - mg(6 + \frac{x}{a})$.	0,5	
Cazanul începe să se ridice când N_1 atinge valoarea zero. Pentru această condiție se află: $x = a\left(\frac{M}{2m} - 6\right) = a$	0,5	
Lucrul mecanic este nul, deoarece deplasarea este perpendiculară pe forțe.	0,25	
c)		
Fie un sistem de corpuri identice conectate între ele precum zalele unui lanț relativ omogen. Sistemul este așezat pe o masă orizontală și o parte este atârnată la marginea mesei. Se trage ușor de partea care atârnă până când sistemul începe să alunece singur. Pentru acest moment se determină numărul de zale care atârnă și al celor de pe masă, și se raționează astfel, modelând sistemul ca mai jos:  La limita desprinderii, considerând coeficientul de frecare cinetică egal cu acela de frecare statică, se scrie: $m_1 g - T = 0$, $T - F_f = 0$. $N - m_2 g = 0$, $F_f = \mu N$.	1,5	**3**

Din aceste relații rezultă: $\mu = \frac{m_1}{m_2} = \frac{N_1 m_0}{N_2 m_0} = \frac{N_1}{N_2}$. În această relație am considerat că masa unei entități elementare din fiecare sistem este m_0 iar cu $N_{1,2}$ am notat numărul de entități din fiecare porțiune de sistem. Înseamnă că putem determina coeficientul de frecare numărând entitățile, în cazul nostru cuburile din fiecare experiment. Pentru sistemul mai ușor: $N_1 = 3,\ N_2 = 10,$ rezultă: $\mu_1 = 0,3$. Pentru al doilea sistem: $N_1 = 9,\ N_2 = 30,$ rezultă: $\mu_2 = 0,3$. *Comentariul 1*: Este firesc să fie același rezultat în ambele cazuri, deoarece natura corpurilor care interacționează este aceeași. *Comentariul 1*: Aparent ar fi o problemă cu sistemul cu masa mai mare, dar trebuie să ținem cont că părțile sistemului sunt conectate între ele, și forța de frecare nu depinde de mărimea suprafeței de contact, ci doar de forța de apăsare normală.	0,5 0,5 0,25 0,25	

Subiectul II: **(10 puncte)**

	Parţial	Punctaj
a)		
Imediat după începutul mișcării bucșei pe cablul inextensibil, acesta se întinde. Punctele A, B și punctul curent în care se află bucșa formează un triunghi, latura cea mare orizontală având lungimea ℓ. Când se ajunge la distanța *b* de-a lungul cablului, restul cablului are lungimea $\ell - b = 112\,\text{m} - 48\,\text{m} = 64\,\text{m}$. Se poate observa că $80^2 = 48^2 + 64^2$, de unde rezultă că la momentul de timp indicat, unghiul făcut de cele două porțiuni ale cablului are valoarea de 90°. 	1	3
Înălțimea *h* a triunghiului este: $h = \dfrac{b(\ell - b)}{a} = 38,4\,\text{m}$.	1	
Energia bucșei se conservă între punctele A și C: $mgh = \dfrac{m\text{v}^2}{2}$.	0,5	
Rezultă: $\text{v} = \sqrt{2gh} = 16,9\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.	0,5	
b)		
Fiecare dintre cele 4 resorturi apasă pe pereții liftului, forțele elastice fiind egale cu forțele de apărare normală la contactul dintre saboți și pereții exteriori : $F_f = \mu N = \mu k \Delta\ell$.	1	3
La echilibru, când liftul este în repaus, putem scrie: $4F_f = Mg$, adică: $4\mu k \Delta\ell = Mg$.	1,5	
De aici rezultă: $k = \dfrac{Mg}{4\mu\Delta\ell} = 27,9\,\dfrac{\text{kN}}{\text{m}}$	0,5	
c)		
Pentru o accelerare, puterea medie a unui motor este $P_m = Aria\,F(\text{v})$, $P_m = 200\,\text{kW}$.	1	4
Pentru urcarea la înălțimea *H*, este nevoie de un număr $N = \dfrac{H}{h} = 32$ de lifturi cuplate.	1	
Deplasarea cu viteza maximă constantă cu un lift are loc în timpul $t_1 = \dfrac{fh}{\text{v}}$; $t_1 = 10\,\text{s}$ Timpul total în care are loc deplasarea cu viteza maximă constanta este $T_1 = N \cdot t_1 = 320\,\text{s}$.	1	
Mișcarea frânată are loc într-un timp egal cu timpul în care mișcarea este încetinită, astfel acest timp este $t_{acc} = \dfrac{\Delta t - T_1 - 31 \cdot t_0}{2}$; $t_{acc} = 160\,\text{s}$.	0,5	
Lucrul mecanic efectuat de motoare în timpul accelerării în timpul deplasării la înălțimea *H* este $L = 32 \cdot 2 \cdot P_m \cdot t_{acc}$; $L = 2048\,\text{MJ}$	0,5	

Subiectul III: **(30 puncte)**

	Parţial	Punctaj
a)		
$\Delta E = L,\ 0 - mgh = -\mu mg\cos\alpha \cdot \dfrac{h}{\sin\alpha} - \mu mg \cdot d$ $0 - mgh = -\mu mg\dfrac{b}{L} \cdot \dfrac{h \cdot L}{h} - \mu mg \cdot d$ $h = \mu \cdot b + \mu \cdot d$ $\Rightarrow \mu = \dfrac{h}{b+d} = 0,25$	1 1 1 1	**4**
b)		
Când începe alunecarea: $F_e - G_t - F_f = 0$ $k\Delta\ell = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$ $k\Delta\ell = mg\left(\dfrac{h}{\sqrt{h^2+b^2}} + \mu\dfrac{b}{\sqrt{h^2+b^2}}\right)$ $k\Delta\ell = \dfrac{mg}{\sqrt{h^2+b^2}}(h+\mu b)$ $g = \dfrac{k\Delta\ell\sqrt{h^2+b^2}}{m(h+\mu b)} = 3,72\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	1 1 1 0,5 0,5	**4**
c)		
Când Drag-On-ul ajunge cu o lungime *x* pe al 2-lea plan înclinat acesta va aluneca fără ca cei doi roboți să mai acționeze asupra cablului $b_1 = \sqrt{\ell_1^2 - h^2} = 12\,\mathrm{m}$, $b_2 = \sqrt{\ell_2^2 - h^2} = 3\sqrt{7}\mathrm{m}$	1	**2**
$\dfrac{mx}{\ell}g\dfrac{h}{\ell_2} - \mu\dfrac{mx}{\ell}g\dfrac{b_2}{\ell_2} - \dfrac{m(\ell-x)}{\ell}g\dfrac{h}{\ell_1} - \mu\dfrac{m(\ell-x)}{\ell}g\dfrac{b_1}{\ell_1} = 0$ $\dfrac{xh}{\ell_2} - \mu\dfrac{xb_2}{\ell_2} - \dfrac{(\ell-x)h}{\ell_1} - \mu\dfrac{(\ell-x)b_1}{\ell_1} = 0$ $x\left(\dfrac{h}{\ell_2} + \dfrac{h}{\ell_1} + \mu\dfrac{b_1}{\ell_1} - \mu\dfrac{b_2}{\ell_2}\right) = \dfrac{\ell}{\ell_1}(h+\mu b_1)$ $x = \dfrac{\ell\ell_2(h+\mu b_1)}{\ell_1(h-\mu b_2)+\ell_2(h+\mu b_1)} = 2\mathrm{m}$ Forța de frecare la alunecare este variabilă din momentul în care Drag-On-ul intră pe planul înclinat de lungime ℓ_1 până când va fi în întregime pe acesta și apoi rămâne constantă până când ajunge în vârful planului înclinat, după care devine variabilă când o parte de lungime *x* ajunge pe planul înclinat de lungime ℓ_2 $F_f = \mu\dfrac{mx_0}{\ell}g\dfrac{b_1}{\ell_1} + \mu\dfrac{m(\ell-x_0)}{\ell}g$ $F_f = \mu mg - \mu\dfrac{mg}{\ell}\left(1 - \dfrac{b_1}{\ell_1}\right)x_0 = 66 - 3,82x_0$ Când $x_0 = 0\mathrm{m}$, Forța de frecare este $F_{f1} = 66\mathrm{N}$ Când $x_0 = \ell = 3,46\mathrm{m}$, forța de frecare este $F_{f2} = 52,8\mathrm{N}$ Când Drag-On-ul întră pe al doilea plan înclinat $F_f = \mu\dfrac{mx}{\ell}g\dfrac{b_2}{\ell_2} + \mu\dfrac{m(\ell-x)}{\ell}g\dfrac{b_1}{\ell_1}$ $F_f = \mu mg\dfrac{b_1}{\ell_1} - \dfrac{\mu mg}{\ell}\left(\dfrac{b_1}{\ell_1} - \dfrac{b_2}{\ell_2}\right)x = 52,8 - 2,64x$ Când $x = 0\mathrm{m}$, Forța de frecare este $F_{f2} = 52,8\mathrm{N}$ iar când $x = 2\mathrm{m}$ forța de frecare este	0,5	

$F_{f3}=47,5\,\mathrm{N}$ Energia minimă consumată de cei doi roboți este: $E=E_p+\left\|L_f\right\|$ $E_p=\frac{m(\ell-x)}{\ell}g\left(h-\frac{\ell-x}{2}\cdot\frac{h}{\ell_1}\right)+\frac{mx}{\ell}g\left(h-\frac{x}{2}\cdot\frac{h}{\ell_2}\right)$ $E_p=\frac{mg}{\ell}\left[(\ell-x)\left(h-\frac{(\ell-x)h}{2\ell_1}\right)+x\left(h-\frac{xh}{2\ell_2}\right)\right]$ $E_p=2213,76\,\mathrm{J}$ $\left\|L_f\right\|=\frac{F_{f1}+F_{f2}}{2}\cdot\ell+F_{f2}\cdot(\ell_1-\ell)+\frac{F_{f2}+F_{f3}}{2}\cdot x$ $\left\|L_f\right\|=205,52\,\mathrm{J}+609,3\,\mathrm{J}+100,3\,\mathrm{J}=915,12\,\mathrm{J}$ $E=3128,88\,\mathrm{J}$	0,5	

Bareme propuse de:
prof. Corina DOBRESCU, Colegiul Național “Tudor Vianu”, București .
prof. Ion BĂRARU, Colegiul Național “Mircea cel Bătrân”, Constanța,
prof. Florin MĂCEȘANU, Școala Gimnazială “Ștefan cel Mare ”, Alexandria.
prof. Constantin RUS, Colegiul Național ”Liviu Rebreanu”, Bistrița