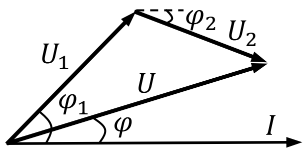
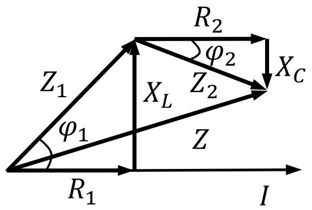
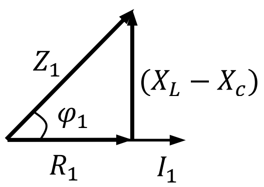
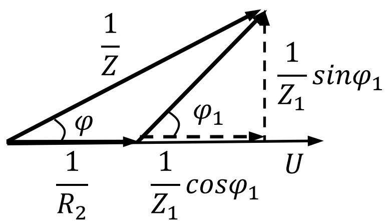
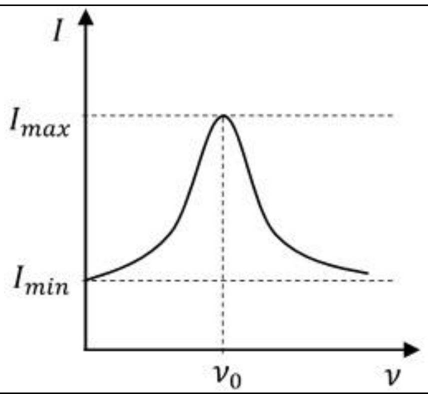
Olimpiada de Fizică
Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București
9 martie 2025
Barem de evaluare și de notare

XII

	Barem Subiectul I ***Circuite curent alternativ***	**Parțial**	**Punctaj**
a.	  Pe baza reprezentărilor fazoriale putem scrie următoarele relații:	0,5p	**2,5p**
	$R_1 = Z_1 cos\varphi_1$; $X_L = Z_1 sin\varphi_1$ $R_2 = Z_2 cos\varphi_2$; $X_C = Z_2 sin\varphi_2$	0,4p	
	$Z_1 = \frac{U_1}{I}$; $Z_2 = \frac{U_2}{I}$	0,4p	
	$U_2^2 = U^2 + U_1^2 - 2UU_2 cos(\varphi_1 - \varphi)$ $U_1^2 = U^2 + U_2^2 - 2UU_1 cos(\varphi_2 + \varphi)$	0,8p	
	$\varphi_1 \cong 46{,}38^o$ $\varphi_2 \cong 16{,}34^o$		
	$R_1 \cong 138\Omega$; $(X_L \cong 144{,}79\Omega)$; $L \cong 115{,}28$mH; $R_2 \cong 144\Omega$; $(X_C \cong 42{,}20\Omega)$; $C \cong 18{,}87\mu$F	0,4p	
b.	Impedanța circuitului este dată de relația: $\bar{Z} = \frac{R_2[R_1 + j(X_L - X_C)]}{R_2 + R_1 + j(X_L - X_C)} = R_2 \frac{R_1(R_1+R_2) + (X_L - X_C)^2}{(R_1+R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} + jR_2{}^2 \frac{X_L - X_C}{(R_1+R_2)^2 + (X_L - X_C)^2}$ La rezonanță $Im\,\bar{Z} = 0 \Rightarrow (X_L - X_C) = 0$, respectiv $X_L = X_C$ și de aici obținem $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cong 108\ Hz.$	1p	**1p**
	O altă abordare: Utilizând reprezentarea fazorială:   la rezonanță defazajul trebuie să fie nul, $\varphi = 0^o$, respectiv: $\frac{1}{Z} sin\varphi = \frac{1}{Z_1} sin\varphi_1 = \frac{X_L - X_C}{Z_1^2} = 0 \Rightarrow (X_L - X_C) = 0$, respectiv $X_L = X_C$ și de aici obținem $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cong 108\ Hz.$	(1p)	
c.	La frecvențe foarte mici, $\omega \to 0$, $X_C \to \infty$, condensatorul împiedică trecerea curentului prin ramura LC, deci curentul va trece doar prin rezistorul R_2, valoarea efectivă fiind: $I_{min} = I_2 = \frac{U}{R_2} \cong 208mA.$	0,5p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	La frecvențe foarte mari, $\omega \to \infty$, $X_L \to \infty$, bobina împiedică trecerea curentului prin ramura LC, deci curentul va trece doar prin rezistorul R_2, valoarea efectivă fiind: $I_{min} = I_2 = \frac{U}{R_2} \cong 208mA.$	0,5p	
	În aceste situații, impedanța are valoarea maximă, $Z_{max} = R_2$		
	La frecvența de rezonanță $X_L = X_C$, ramura L, R_1, C are un comportament pur rezistiv, curentul din această ramură are intensitatea efectivă: $I_1 = \frac{U}{R_1} \cong 217\ mA.$ Curentul total (circuit pur rezistiv) va avea valoarea efectivă: $I_0 = I_{max} = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_p} = 425mA$ În această situație impedanța are valoare minimă: $Z_{min} = \frac{R_1R_2}{R_{1+}R_2}$	0,5p	
	O altă abordare: $I = \frac{U}{Z} = U\sqrt{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_1}cos\varphi_1\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_1}sin\varphi_1\right)^2}$ După calcule obținem: $I = U\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2}\right)\frac{1}{R_1^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ Atât la frecvențe foarte mici, cât și la frecvențe foarte mari: $\left.\begin{matrix}\omega \to 0\\ \omega \to \infty\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \to \infty$ și intensitatea efectivă va fi minimă, $I_{min} = I_2 = \frac{U}{R_2} \cong 208mA.$ La rezonanță $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0$ și intensitatea efectivă va fi maximă, $I_{max} = U\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2}\right)\frac{1}{R_1^2}} = U\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} = \frac{U}{R_p} = 425mA$	(1,5p)	**2,5p**
	Reprezentare grafică: 1p  	1p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Olimpiada de Fizică

Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București

9 martie 2025

Barem de evaluare și de notare

	$I \ge \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; Z \le \sqrt{2} \cdot Z_{min}$	0,5p	
	Din ecuația $\frac{U}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U}{Z_{min}}$, respectiv, $\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \left(\frac{2R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{1}{R_1^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$ se obține după calcule relația: $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R_1^2\frac{(R_1+R_2)^2}{R_2^2+2R_1R_2-R_1^2} = a^2$	0,5p	
d.	Putem scrie ecuația: $LC\omega^2 \pm aC\omega - 1 = 0$. Soluțiile pozitive acestei ecuații reprezintă pulsațiile de tăiere: $\omega_1 = \frac{-aC + \sqrt{a^2C^2+4LC}}{2LC}$ și $\omega_2 = \frac{aC + \sqrt{a^2C^2+4LC}}{2LC}$	0,5	**2p**
	Se observă cu ușurință că: $\omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{a^2C^2+4LC-a^2C^2}{4L^2C^2} = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$ respectiv, $\nu_1 \cdot \nu_2 = \frac{1}{4\pi^2LC} = \nu_0^2$	0,5	
e.	Pentru ca prin ampermetru să nu treacă curent trebuie îndeplinită relația: $\bar{Z}_1 \cdot \bar{X}_C = \bar{R}_2 \cdot \bar{Z}_3$ $(R_1 + jL\omega)\left(-j\frac{1}{C\omega}\right) = R_2\left(R_3 - j\frac{1}{C_3\omega}\right)$	0,4	**1p**
	$\frac{L}{C} - j\frac{R_1}{C\omega} = R_2R_3 - j\frac{R_2}{C_3\omega}$	0,2	
	Obținem: $R_3 = \frac{L}{R_2C}$ și $C_3 = C\frac{R_2}{R_1}$	0,2	
	$R_3 \cong 42{,}42\Omega$ și $C_3 \cong 19{,}69\mu F$	0,2	
Oficiu			**1p**
Total subiectul I			**10p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Barem Subiectul II ***Imagini în dioptrul plan***	**Parțial**	**Punctaj**
A	Imaginea sursei S se află la distanța *y* față de suprafața lichidului: $\frac{y}{n_{aer}} = \frac{H}{n_0}$	0,3p	**0,5p**
	Distanța dintre sursă și imaginea sursei: $\Delta y = H\left(1 - \frac{1}{n_0}\right)$	0,2p	
B	Imaginea S_1 a sursei S în dioptrul plan care separă cele două lichide nemiscibile se află la distanța y_1 față de suprafața de separare a lichidelor: $\frac{y_1}{n_2} = \frac{H}{n_1}$	0,3p	**1p**
	Imaginea S_2 a obiectului S_1 în dioptrul plan care separă cel de-al doilea lichid de aer se află la distanța y_2 față de această suprafață: $\frac{y_2}{n_{aer}} = \frac{H + y_1}{n_2}$	0,3p	
	Distanța dintre sursă și imaginea sursei: $\Delta y = 2H - y_2$	0,2p	
	Obținem: $\Delta y = H\left(2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$	0,2p	
C	Imaginea sursei în stratul cu grosimea elementară dy se formează, față de sursă, la distanța: $dY = \left(1 - \frac{1}{n_0\left(1 + \varepsilon \frac{y}{H}\right)}\right) dy$	0,5p	**2p**
	Integrăm pentru întregul lichid: $\int_0^{\Delta Y} dY = \int_0^H \left(1 - \frac{1}{n_0\left(1 + \varepsilon \frac{y}{H}\right)}\right) dy$	1p	
	Obținem: $\Delta Y = H\left(1 - \frac{1}{\varepsilon n_0} \ln(1 + \varepsilon)\right)$	0,5p	
D **a.**	Coordonatele sferei în timpul mișcării sale sunt: $x_s = x_0 + v_0 t$	0,3p	**3p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$y_s = \frac{a}{2}t^2$		
	Accelerația sferei la deplasarea în lichid: $a = \left(\frac{\rho_0}{\rho_s} - 1\right)g$	0,3p	
	Ecuația traiectoriei sferei, $y_s = f(x_s)$: $y_s = \frac{g}{2v_0^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_s} - 1\right)(x_s - x_0)^2 = k \cdot (x_s - x_0)^2$	0,3p	
	Coordonata, X, a imaginii unui punct de pe traiectoria sferei este egală cu coordonata x_s a sferei: $X = x_s$	0,3p	
	Notăm cu Y coordonata imaginii punctului de coordonată y_s de pe traiectoria sferei. Distanța dintre cele două puncte conjugate este: $\Delta Y = Y - y_s$	0,3p	
	Coordonata, Y, a imaginii unui punct de pe traiectoria sferei: $Y = y_s + \int_{y_s}^{H}\left(1 - \frac{1}{n_0\left(1 + \varepsilon\frac{y}{H}\right)}\right)dy$	0,5p	
	Obținem: $Y = H\left(1 - \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln\left(1 + \varepsilon\frac{y_s}{H}\right)}{\varepsilon n_0}\right)$ (*)	0,3p	
	Ecuația traiectoriei imaginii sferei: $Y = H\left(1 - \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln\left(1 + \varepsilon k\frac{(x_s - x_0)^2}{H}\right)}{\varepsilon n_0}\right)$	0,3p	
	$Y = H\left(1 - \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln\left(1 + \varepsilon k\frac{(x_s - x_0)^2}{H}\right)}{\varepsilon n_0}\right) = H\left(1 - \frac{1}{n_0}\right) + \frac{k}{n_0}(x_s - x_0)^2$	0,4p	
D b.	Componenta, V_X, a vitezei imaginii unui punct de pe traiectoria sferei: $V_X = v_0$	0,2p	**2,5p**
	Componenta, V_Y, a vitezei imaginii unui punct de pe traiectoria sferei: $V_Y = \frac{dY}{dt}$	0,2p	

	Din relația (*): $V_Y=\frac{H}{\varepsilon n_0}\frac{d}{dt}\left(\ln\left(1+\varepsilon\frac{y_s}{H}\right)\right)=\frac{1}{n_0\left(1+\varepsilon\frac{y_s}{H}\right)}\frac{dy_s}{dt}$	1p	
	Componenta, v_{y_s} a vitezei sferei: $v_{y\_s}=at=\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)gt$	0,5p	
	Obținem viteza imaginii: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{v_0^2+\frac{1}{n_0^2\left(1+\frac{\varepsilon}{2H}\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)gt^2\right)^2}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)^2g^2t^2}$	0,3p	
	Pentru $\varepsilon=0$ $\Rightarrow$ $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{v_0^2+\frac{1}{n_0^2}\cdot\left(\frac{\rho_0}{\rho_s}-1\right)^2g^2t^2}$	0,3p	
Oficiu			**1p**
TOTAL			**10p**

<table>
<tr><th>Barem Subiectul III Întâlnirile navelor cosmice relativiste</th><th>Parțial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>3,00 p</td><td>3,00 p</td></tr>
<tr><td>În desenul din figura 4 am considerat că nava cosmică B este un sistem de referinţă fix, faţă de care, în acord cu enunţul problemei, navele cosmice A şi C se deplasează cu vitezele relative $\vec{v}_{AB} = \vec{v}$ şi respectiv $\vec{v}_{CB} = -\vec{v}$, pentru care $v_{AB} = v_{CB} = v$, astfel încât, cele două viteze relative sunt egale în modul și de sens contrar, $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{CB}$.

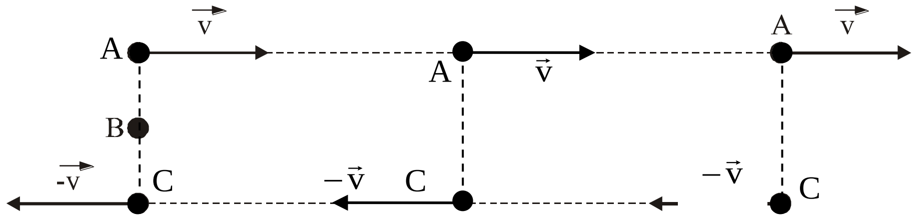


Fig. 4</td><td>0,50 p</td><td></td></tr>
<tr><td>Ca urmare, distanţa parcursă de nava cosmică A în raport cu nava cosmică B, de la întâlnirea navelor cosmice A – B până la întâlnirea navelor cosmice A – C, este egală cu distanţa parcursă de nava cosmică C în raport cu nava cosmică B, de la întâlnirea navelor cosmice C – A, până la întâlnirea navelor cosmice C – B.
Deplasarea navei cosmice A, de la întâlnirea cu nava cosmică B, când ceasornicele acestora s-au sincronizat, ambele să indice ora ”zero” și până la întâlnirea navei cosmice A cu nava cosmică C, este un proces a cărui durată, măsurată cu ceasornicul navei cosmice A, se identifică chiar cu indicaţia t' a ceasornicului navei cosmice A, indicație precizată în enunțul problemei, aceasta reprezentând timpul propriu al ceasornicului navei cosmice A, la întâlnirea cu nava cosmică C.
Durata aceluiaşi proces, (deplasarea navei cosmice A, de la întâlnirea cu nava cosmică B, până la întâlnirea cu nava cosmică C), măsurată cu ceasornicul navei cosmice B (din sistemul fix al navei cosmice B) este:
$$t_{1B} = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
identificându-se chiar cu indicaţia ceasornicului navei cosmice B, în momentul întâlnirii navei cosmice A cu nava cosmică C.</td><td>1,00 p</td><td></td></tr>
<tr><td>De la întâlnirea navelor cosmice A şi C, când, sincronizându-se cu ceasornicul navei cosmice A, ceasornicul navei C indică şi el ora t', şi până la întâlnirea navelor cosmice C şi B, deplasarea navei cosmice C în raport cu nava cosmică B reproduce, în sens invers, deplasarea navei cosmice A în raport cu nava cosmică B.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr><td>

Ca urmare, durata deplasării navei cosmice C de la întâlnirea sa cu nava cosmică A şi până la întâlnirea navei cosmice C cu nava cosmică B, măsurată cu ceasornicul navei cosmice C este t', astfel încât indicaţia ceasornicului navei cosmice C la întâlnirea sa cu nava cosmică B este $t_C = 2t'$, reprezentând timpul propriu al navei cosmice C la întâlnirea sa cu nava cosmică B.

Durata aceluiaşi proces, determinată cu ceasornicul navei cosmice B (din sistemul fix al navei cosmice B) va fi:

$$t_{2B} = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t_{1B},$$

astfel încât indicaţia ceasornicului navei cosmice B la întâlnirea cu nava cosmică C este:

$$t_B = t_{1B} + t_{2B} = \frac{2\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

</td><td>1,00 p</td><td></td></tr>
<tr><td>

Diferenţa indicaţiilor ceasornicelor din navele cosmice B şi C la întâlnirea navelor cosmice B şi C este:

$$\Delta t = t_B - t_C = \frac{2\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 2t' = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)t'.$$

În variantă nerelativistă, când $v << c$, rezultă $\Delta t = 0$.

</td><td>0,50 p</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>3,00 p</td><td>3,00 p</td></tr>
<tr><td>

Adoptând ca *sistem inerţial fix*, sistemul S, reprezentat în desenul din figura 5, sistem ataşat stelei Σ, sistem faţă de care cele trei nave cosmice sunt în mişcări rectilinii şi uniforme, cu vitezele $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ şi respectiv $\vec{v}_C$, precizate în enunţul problemei, iar *ca sistem inerţial mobil*, sistemul S′ ataşat navei cosmice B, şi ştiind că vitezele relative ale navelor cosmice A şi C, în raport cu nava cosmică B, sunt date de relaţiile:

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_A\cdot\vec{v}_B}{c^2}};\quad \vec{v}_{CB} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_C\cdot\vec{v}_B}{c^2}},$$

rezultă:

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_A\cdot\vec{v}_B}{c^2}} = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1 - \frac{v_A\cdot v_B}{c^2}};$$

$$\vec{v}_{CB} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_C\cdot\vec{v}_B}{c^2}} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{1 + \frac{v_C\cdot v_B}{c^2}};$$

</td><td>0,50 p</td><td></td></tr>
</table>

$$\vec{V}_{AB}=\vec{v}_A-\vec{v}_B=\left(1-\frac{v_A\cdot v_B}{c^2}\right)\cdot\vec{v}_{AB};\ \vec{V}_{CB}=\vec{v}_C-\vec{v}_B=\left(1+\frac{v_C\cdot v_B}{c^2}\right)\cdot\vec{v}_{CB}.$$

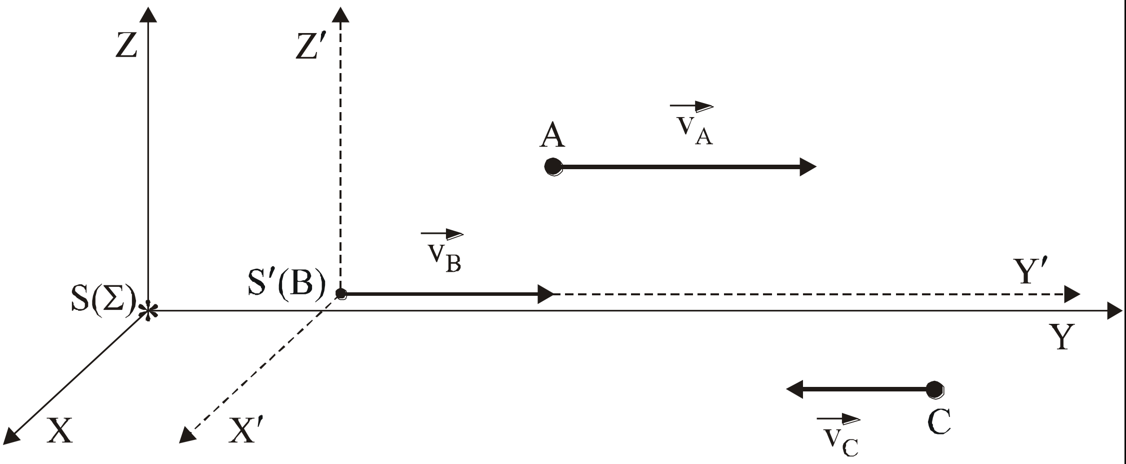


Fig. 5

Utilizând desenul din figura 6 rezultă:

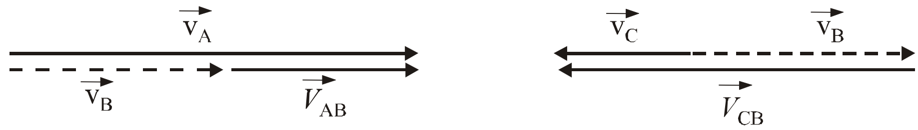


Fig. 6

$$V_{AB}=v_A-v_B=\left(1-\frac{v_A\cdot v_B}{c^2}\right)\cdot v_{AB};$$

$$v_{AB}=\frac{v_A-v_B}{1-\frac{v_A\cdot v_B}{c^2}};$$

$$V_{CB}=v_C+v_B=\left(1+\frac{v_C\cdot v_B}{c^2}\right)\cdot v_{CB};$$

$$v_{CB}=\frac{v_C+v_B}{1+\frac{v_C\cdot v_B}{c^2}};$$

1,50 p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Olimpiada de Fizică

Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București

9 martie 2025

Barem de evaluare și de notare

XII

$$v_{AB} = v_{CB};\quad \frac{v_A - v_B}{1-\dfrac{v_A \cdot v_B}{c^2}} = \frac{v_C + v_B}{1+\dfrac{v_C \cdot v_B}{c^2}};$$

$$(v_A - v_B)\cdot\left(1+\frac{v_C\cdot v_B}{c^2}\right) = (v_C + v_B)\cdot\left(1-\frac{v_A\cdot v_B}{c^2}\right);$$

$$v_A + \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} - v_B - \frac{v_B^2\cdot v_C}{c^2} = v_C - \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} + v_B - \frac{v_A\cdot v_B^2}{c^2};$$

$$v_A - v_C + \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} - 2\cdot v_B + \frac{v_A\cdot v_B^2}{c^2} - \frac{v_B^2\cdot v_C}{c^2} + \frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} = 0;$$

$$v_A - v_C + 2\cdot\frac{v_A\cdot v_B\cdot v_C}{c^2} - 2\cdot v_B + \frac{v_B^2}{c^2}\cdot(v_A - v_C) = 0;$$

$$\frac{v_A - v_C}{c^2}\cdot v_B^2 - 2\cdot\left(1-\frac{v_A\cdot v_C}{c^2}\right)\cdot v_B + (v_A - v_C) = 0;$$

$$\frac{v_A - v_C}{c^2}\cdot v_B^2 - 2\cdot\left(\frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{c^2}\right)\cdot v_B + (v_A - v_C) = 0;$$

$$v_B^2 - 2\cdot\frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C}\cdot v_B + c^2 = 0;$$

$$(v_B)_{1,2} = \frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2 - v_A\cdot v_C}{v_A - v_C}\right)^2 - c^2}.$$

reprezentând valorile posibile ale vitezei navei cosmice B, în raport cu steaua Σ, astfel încât vitezele relative ale navelor cosmice A și respectiv C, în raport cu nava cosmică B, să fie egale în modul și de sens contrar, $(\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{CB})$, în raport cu steaua Σ.

Caz particular : $v_A \ll c;\quad v_C \ll c;$

1)

$$(v_B)_1 = \frac{c^2\left(1-\dfrac{v_A\cdot v_C}{c^2}\right)}{v_A - v_C} - \sqrt{c^4\cdot\left(\frac{1-\dfrac{v_A\cdot v_C}{c^2}}{v_A - v_C}\right)^2 - c^2};$$

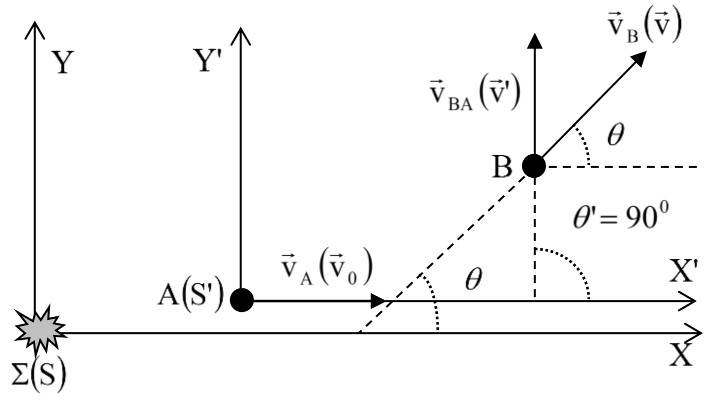
$$v_A\cdot v_C \ll c^2;\quad \frac{v_A\cdot v_C}{c^2} \ll 1;$$

$$(v_B)_1 = \frac{c^2}{v_A - v_C} - \sqrt{\frac{c^4}{(v_A - v_C)^2} - c^2};$$

0,50 p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

$$(v_B)_1=\frac{c^2}{v_A-v_C}-\sqrt{\frac{c^4-c^2\cdot(v_A-v_C)^2}{(v_A-v_C)^2}};$$ $$(v_B)_1=\frac{c^2}{v_A-v_C}-\sqrt{\frac{c^4\cdot\left[1-\frac{(v_A-v_C)^2}{c^2}\right]}{(v_A-v_C)^2}};$$ $$(v_B)_1=\frac{c^2}{v_A-v_C}-\frac{c^2}{v_A-v_C}\cdot\sqrt{1-\frac{(v_A-v_C)^2}{c^2}};$$ $$(v_B)_1=\frac{c^2}{v_A-v_C}-\frac{c^2}{v_A-v_C}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_A-v_C}{c}\right)^2};$$ $$\frac{v_A-v_C}{c}<<1;$$ $$(v_B)_1=\frac{c^2}{v_A-v_C}-\frac{c^2}{v_A-v_C}\left(1-\frac{(v_A-v_C)^2}{2c^2}\right);\ (v_B)_1=\frac{v_A-v_C}{2};$$ **2)** $$(v_B)_2=\frac{c^2-v_A\cdot v_C}{v_A-v_C}+\sqrt{\left(\frac{c^2-v_A\cdot v_C}{v_A-v_C}\right)^2-c^2};$$ $$v_A\cdot v_C<<c^2;\ \frac{v_A\cdot v_C}{c^2}<<1;$$ $$(v_B)_2=\frac{c^2}{v_A-v_C}+\sqrt{\frac{c^4}{(v_A-v_C)^2}-c^2};$$ $$(v_B)_2=\frac{c^2}{v_A-v_C}+\sqrt{\frac{c^4-c^2\cdot(v_A-v_C)^2}{(v_A-v_C)^2}};$$ $$(v_B)_2=\frac{c^2}{v_A-v_C}+\sqrt{\frac{c^4\cdot\left[1-\frac{(v_A-v_C)^2}{c^2}\right]}{(v_A-v_C)^2}};$$ $$(v_B)_2=\frac{c^2}{v_A-v_C}+\frac{c^2}{v_A-v_C}\cdot\sqrt{1-\frac{(v_A-v_C)^2}{c^2}};$$ $$(v_B)_2=\frac{c^2}{v_A-v_C}+\frac{c^2}{v_A-v_C}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_A-v_C}{c}\right)^2};$$ $$\frac{v_A-v_C}{c}<<1;$$	0,50 p	

$$(\mathrm{v_B})_2 = \frac{c^2}{\mathrm{v_A - v_C}} + \frac{c^2}{\mathrm{v_A - v_C}};\ (\mathrm{v_B})_2 = \frac{2\cdot c^2}{\mathrm{v_A - v_C}},$$ dar, știind că $(\mathrm{v_B})_2 < c$, rezultă: $$\frac{2\cdot c^2}{\mathrm{v_A - v_C}} < c;\ \frac{2\cdot c}{\mathrm{v_A - v_C}} < 1;\ 2\cdot c < \mathrm{v_A - v_C};$$ $$\frac{\mathrm{v_A - v_C}}{2} > c,$$ rezultat care nu poate fi acceptat!		
c)	**3,00 p**	**3,00 p**
Adoptând ca sistem inerţial fix, sistemul S din figura 7, ataşat stelei Σ, faţă de care navele cosmice A şi B sunt în mişcări rectilinii şi uniforme, iar ca sistem inerţial mobil, sistemul S′, ataşat navei cosmice A (în mişcare faţă de sistemul fix cu viteza $\vec{\mathrm{v}}_A = \vec{\mathrm{v}}_0$), atunci vitezele navei cosmice B în raport cu nava cosmică A (în raport cu sistemul mobil S′), $\vec{\mathrm{v}}_{BA} = \vec{\mathrm{v}}'$, şi în raport cu steaua Σ, $\vec{\mathrm{v}}_B = \vec{\mathrm{v}}$, au componentele : $$(\mathrm{v}')_{X'} = 0;\ (\mathrm{v}')_{Y'} = \mathrm{v_{BA}};\ (\mathrm{v})_X = \mathrm{v_B}\cdot\cos\theta;\ (\mathrm{v})_Y = \mathrm{v_B}\cdot\sin\theta,$$ relaţiile dintre acestea, fiind precizate în enunţul problemei, rezultă:  **Fig. 7**	0,50 p	
$$\mathrm{v_X} = \frac{\Delta x}{\Delta t};\ \mathrm{v_Y} = \frac{\Delta y}{\Delta t};\ \Delta y = \Delta y';$$ $$t = \frac{t' + \frac{\mathrm{v_0}}{c^2}\cdot x'}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v_0^2}}{c^2}}};\ \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{\mathrm{v_0}}{c^2}\cdot\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v_0^2}}{c^2}}};$$ -- -	0,50 p	

$v_X = \dfrac{v'_{X'} + v_0}{1 + \dfrac{v_0}{c^2} \cdot v'_{X'}}$; $v_Y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{\Delta y'}{\dfrac{\Delta t' + \dfrac{v_0}{c^2} \cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}}} = \dfrac{\dfrac{\Delta y'}{\Delta t'}}{\dfrac{1 + \dfrac{v_0}{c^2} \cdot \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}}}$; $v_Y = \dfrac{v'_{Y'}}{1 + \dfrac{v_0}{c^2} \cdot v'_{X'}} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}$; $(v)_X = \dfrac{(v')_{X'} + v_0}{1 + \dfrac{v_0 \cdot (v')_{X'}}{c^2}}$; $(v)_Y = \dfrac{(v')_{Y'}}{1 + \dfrac{v_0 \cdot (v')_{X'}}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}$,	1,00 p	
--- astfel încât, în acord și cu desenul din figura 3 din enunțul problemei, rezultă : $v_B \cdot \cos\theta = v_A$; $v_B \cdot \sin\theta = v_{BA} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v_A^2}{c^2}}$; $v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 \cdot \left(1 - \dfrac{v_A^2}{c^2}\right)}$; $\dfrac{v_B \cdot \sin\theta}{v_B \cdot \cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{v_{BA} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v_A^2}{c^2}}}{v_A} = \dfrac{v_{BA}}{v_A} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{v_A^2}{c^2}}$.	0,50 p	
Variantă nerelativistă : $v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2}$; $\tan\theta = \dfrac{v_{BA}}{v_A}$.	0,50	
Oficiu		**1,00 p**
Total subiectul II		**10 p**

Barem propus de:
***Prof. Florin Butușină**, Colegiul Național "Simion Bărnuțiu", Șimleu Silvaniei*
***Prof.dr. Costin Dobrotă**, Colegiul Național "Dimitrie Cantemir", Onești*
***Prof.dr. Mihail Sandu**, Universitatea din Craiova*